BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2013

ИОТ 517.54

KVANT MEXANİKASINDA OPERATORLARIN KOMMUTASİYA ŞƏRTLƏRİNİN ÇEVRİLMƏ QANUNLARI HAQQINDA

Ə.Q.AĞAMALIYEV
Bakı Dövlət Universiteti
qulu oglu@mail.ru

Məqalədə kvant mexanikasında koordinat çevirmələri zamanı operatorların kommutasiya şərtlərinin çevrilməsi məsələsinə baxılmışdır. Göstərilmişdir ki, klassik mexanikada Puasson mötərizələrinin kanonik çevrilmələrə nəzərən invariant qaldığı kimi kvant mexanikasında operatorların kommutasiya şərti unitar çevrilmələrə nəzərən invariant qalırlar.

Açar sözlər: kanonik çevrilmələr, unitar çevrilmələr, kommutator.

Kvant mexanikasına aid bəzi kitablarda [1] bərk cismin fırlanmasının kvantlanması məsələsinə baxılarkən bərk cismin fırlanma hərəkətinin Hamilton funksiyası

$$\boldsymbol{H} = \frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{\boldsymbol{M}_\xi^2}{\boldsymbol{I}_1} + \frac{\boldsymbol{M}_\eta^2}{\boldsymbol{I}_2} + \frac{\boldsymbol{M}_\varsigma^2}{\boldsymbol{I}_3}\right)$$

kimi ifadə olunur. Burada I_1, I_2, I_3 bərk cismin baş ətalət momentləridir. $\boldsymbol{M}_\xi$, $\boldsymbol{M}_\eta$, $\boldsymbol{M}_\varsigma$ fırlanan koordinat sistemindəki impuls momentləridir.

Orada qeyd edilir ki, M_ξ , M_η, M_ς operatorları üçün kommutasiya şərtləri fırlanan koordinat sistemlərində məlum deyil. Fırlanan koordinat sistemində kommutasiya şərtini tapmaq üçün

$$(\vec{M}\,\vec{a})(\vec{M}\,\vec{b}) - (\vec{M}\,\vec{b})\,(\vec{M}\,\vec{a}) = -i\vec{M}\,[\vec{a}\,\vec{b}] \qquad (1)$$

düsturundan istifadə etmək lazımdır. Burada $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları bərk cismi xarakterizə edən ixtiyari vektorlardır. Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarını ξ və η oxları istiqamətində yönəlmiş vahid vektorlar kimi seçsək, onda (1) düsturu

$$\boldsymbol{M}_\xi \boldsymbol{M}_\eta - \boldsymbol{M}_\eta \boldsymbol{M}_\xi = -\boldsymbol{i}\boldsymbol{M}_\varsigma \qquad (2)$$

şəklini alar. Analoji yolla başqa kommutasiya şərtlərini ala bilərik. Bu isə onu göstərir ki, fırlanan koordinat sistemindəki kommutasiya şərtləri tərpənməz sistemdəki kommutasiya şərtlərindən işarə ilə fərqlənir.

Lakin bu məsələyə başqa yaxınlaşma da vardır [2]. Klassik mexanikada kanonik dəyişənlərdən asılı ixtiyari $f(q_i, p_i)$ və $g(q_i, p_i)$ funksiyalarından düzəldilmiş

$$[f,g]_{q_i,p_i} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

ifadəsinə Puasson mötərizələri deyilir. Bu mötərizələrin xassələri klassik mexanika kurslarında verilmişdir [3,4]. Onlar aşağıdakı kimidir [5].

1) c - sabitdirsə $[f,c]=[c,f]=0$.
2) $[t,g]=-[g,f]$.
3) $[f,g+h]=[f,g]+[f,h]$.
4) $[f,gh]=[f,g]h+g[f,h]$
5) $[f,[g,h]]+[g[h,t]]+[h[f,g]]=$
6) $\frac{\partial}{\partial t}[f,g]=\left[\frac{\partial f}{\partial t},g\right]+\left[f,\frac{\partial g}{\partial t}\right]$

Kvant mexanikasında fiziki kəmiyyətlərə ermit operatorlar qarşı qoyulur. Tutaq ki, həmin kəmiyyətlər də yuxarıda saydığımız xassələrə malik olan kvant Puasson mötərizələrini ödəyirlər. Həmin kvant Puasson mötərizələrinin aşqar ifadələrini tapaq: [2]. Kvant Puasson mötərizələrində klassik mötərizələr kimi [...] işarə edək və $[WX,YZ]$ ifadəsinə baxaq. Bu ifadəni Puasson mötərizələrinin xassələrinə əsaslanaraq aşağıdakı kimi aça bilərik

$$[WX,YZ]=Y[WX,Z]+[WX,Y]Z=YW[X,Z]+Y[W,Z]X+W[X,Y]Z+[W,Y]XZ$$

Digər tərəfdən

$$[WX,YZ]=W[X,YZ]+[W,YZ]X=W[X,Y]Z+WY[X,Z]+Y[W,Z]X+[W,Y]ZX$$

Aldığımız ifadələrin sol tərəfləri bərabər olduğundan sağ tərəflərdə bərabər olmalıdırlar. Buradan alırıq ki,

$$(WY,YW)[X,Z]=[W,Y](XZ-ZX) \qquad (2)$$

Buradan görürük ki, bərabərliyin ödənilməsi üçün $WY-YW$ kommutatoru $[W,Y]$ kvant Puason mötərizəsinə, $XZ-ZX$ kommutatoru isə $[X,Z]$ kvant Puasson mötərizəsinə mütənasib olmalıdır. Mütənasiblik əmsalını $i\hbar$-la işarə etsək alırıq:

$$WY - YW = i\hbar[W, Y]$$
$$XZ - ZX = i\hbar[X, Z] \qquad (3)$$

Deməli, kvant Puasson mötərizələri həmin operatorların kommutasiyası ilə mütənasibdir.

$$[W, Y] = \frac{1}{i\hbar}(WY - YW)$$
$$[X, Z] = \frac{1}{i\hbar}(XZ - ZX)$$

Buradan belə nəticəyə gələ bilərik ki, kvant mexanikasında fiziki kəmiyyətlərə qarşı qoyulan operatorların kommutasiya şərtləri Puasson mötərizələrinin xassələrinə malik olmalıdırlar.

Puasson mötərizələrinin ən mühüm xassəsi onların kanonik çevirmələrə nəzərən invariant olmalıdır.

Klassik mexanikadakı kanonik çevirmələrə kvant mexanikasında unitar çevirmələr uyğun gəlir [2].

Məlum olduğu kimi tərpənməz hesablama sistemindən fırlanan hesablama sisteminə keçid çevirməsi kanonik çevirmədir [4].

Daha inandırıcı olması üçün qeyd edək ki, həmin kanonik çevirmənin yaradıcı funksiyası $F_2(q_i, p_i^{'}, t)$ ikinci növ yaradıcı funksiyadır və aşqar şəkli belədir:

$$\boldsymbol{F}_2(\vec{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{p}_i^{'}, \boldsymbol{t}) = (\vec{\boldsymbol{r}}\vec{\boldsymbol{p}}') - \boldsymbol{t}\delta\vec{\Omega}[\vec{\boldsymbol{r}}\ \vec{\boldsymbol{p}}'] \ . \qquad (4)$$

Burada $\delta\vec{\Omega}$ - sonsuz kiçik fırlanma bucaq sürətidir.

İkinci növ yaradıcı funksiyaların xassəsindən və (4) aşqar şəklindən istifadə edərək göstərək ki, həmin yaradıcı funksiyanın verdiyi kanonik çevirmə tərpənməz koordinat sistemindən ona nəzərən sonsuz kiçik $\delta\vec{\Omega}$ bucaq sürətilə fırlanan sistemə çevirmə düsturunu verir:

$F_2(q_i, p_i^{'}, t)$ funksiyasının ümumi ifadəsindən yaza bilərik ki,

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \qquad \frac{\partial F_2}{\partial p_i^{'}} = q_i^{'}$$

$F_2(q_i, p_i^{'}, t)$ funksiyasının (4) ifadəsini aşağıdakı kimi açaq:

$$F_2(\vec{r}_i, p_i^{'}, t) = (\vec{r}\vec{p}') - t\delta\vec{Q}[\vec{r}\vec{p}'] =$$
$$= xp_x^{'} + yp_y^{'} + zp_z^{'} - t\left\{\delta\Omega_x(yp_z^{'} - zp_y^{'}) + \delta\Omega_y(zp_x^{'} - xp_z^{'}) + \delta\Omega_z(xp_y^{'} - yp_x^{'})\right\}$$

Buradan:

$$\frac{\partial F_2}{\partial p_x^{'}} = x' = x - t(\delta\Omega_y z - \delta\Omega_z y)$$

$$x' = x - t[\delta\vec{\Omega}\vec{r}\,]_x$$

analoji olaraq

$$y' = y - t[\delta\vec{\Omega}\vec{r}\,]_x$$

$$z' = z - t[\delta\vec{\Omega}\vec{r}\,]_y$$

Kanonik çevirmənin ikinci hissəsini tapmaq üçün F_2 - funksiyası üçün $\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i$ düsturundan istifadə edək.

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = p_x = p_x^{'} - t(\delta\Omega_t z - \delta\Omega_y p_z^{'}) = p_x^{'} + t[\delta\vec{\Omega}\vec{p}\,']_x$$

Analoji olaraq

$$p_y = p_y^{'} + t[\delta\vec{\Omega}\vec{p}\,']_y$$

$$p_z = p_z^{'} + t[\delta\vec{\Omega}\vec{p}\,']_z$$

Beləliklə, göstərdik ki, (4) şəklində yazılmış yaradıcı funksiya tərpənməz koordinat sistemindən fırlanan koordinat sisteminə keçid düsturunu verir.

Analoji ifadələr kvant mexanikasında bir sistemdən digər hesablama sisteminə keçid unitar çevirmələr vasitəsilə ifadə olunur.

Deyilənləri əyani şəkildə göstərmək üçün əsas fiziki kəmiyyətlərin klassik və kvant Puasson mötərizələrinin ifadələrini bir daha yada salaq.

Klassik Puasson mötərizələri:

$$[\boldsymbol{q}_i,\, \boldsymbol{p}_i] = \delta_{ij} \;;\; [\boldsymbol{q}_i,\, \boldsymbol{M}_j] = \varepsilon_{ijl}\boldsymbol{q}_l \;;\; [\boldsymbol{p}_i,\, \boldsymbol{M}_j] = \varepsilon_{ijl}\,\boldsymbol{p}_i \;;\; [\boldsymbol{M}_i,\, \boldsymbol{M}_j] = \varepsilon_{ijl}\,\boldsymbol{M}_l$$

Kvant Puasson mötərizələri:

$$[\boldsymbol{q}_i,\, \boldsymbol{p}_i] = \boldsymbol{i}\hbar\delta_{ij} \;;\; [\boldsymbol{q}_i,\, \boldsymbol{M}_i] = \boldsymbol{i}\hbar\varepsilon_{ijl}\boldsymbol{q}_{l'}\, [\boldsymbol{p}_i,\, \boldsymbol{M}_j] = \boldsymbol{i}\hbar\varepsilon_{ijl}\,\boldsymbol{p}_l ;\; [\boldsymbol{M}_i,\, \boldsymbol{M}_j] = \boldsymbol{i}\hbar\varepsilon_{ijl}\,\boldsymbol{M}_l$$

L.D.Landau və E.M.Lifşisin kitablarında Puasson mötərizələrinin təyini digər kitablardakı ifadələrdən fərqləndiyinə görə yuxarıda yazılmış ifadələrin sağ tərəfinə (-) mənfi işarəsi əlavə olunur. Bunun nəticəsində də məqalənin əvvəlində yazdığımız ifadənin sağ tərəfinə mənfi işarəsi əlavə olunur.

Bunu əyani surətdə göstərək: Bunun üçün (1) düsturunun sol tərəfini hesablayaq:

$$(\vec{M}\vec{a})(\vec{M}\vec{b})-(\vec{M}\vec{b})(\vec{M}\vec{a})=\left[(\vec{M}a),(\vec{M}\vec{b})\right]=\left[\sum_{ij} M_i a_i\ ,M_i b_j\right]=$$

$$\sum_{i,j} a_i b_j [M_i, M_j]$$

Alınan bu ifadədə $[M_i, M_j]$ kommutatorunu yuxarıda yazılan düstur vasitəsilə $i\varepsilon_{ijk}M_k$ ilə əvəz etsək alırıq ki,

$$(\vec{M}\vec{a})(\vec{M}\vec{b})-(\vec{M}\vec{b})(\vec{M}\vec{a})=\sum_{ijk} a_i b_j (i\hbar\varepsilon_{ijk}M_k)=$$

$$=i\hbar\sum_k \vec{M}_k \sum_{ij}\varepsilon_{ijk}a_i b_j = i\hbar\sum_k M_k[\vec{a}\vec{b}]_k = i\hbar([\vec{a}\vec{b}]\vec{M})$$

Digər tərəfdən həmin ifadəni hesablamaq üçün Puasson mötərizələri üçün Landau işarələmələrini qəbul etsək, onda alırıq ki,

$$[(\vec{M}\vec{a}),\ (\vec{M}\vec{b})]=-i\hbar([\vec{a}\,\vec{b}]\vec{M})$$

Alınan ifadələrdə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarını ξ, η oxları üzrə yönəlmiş vahid vektorlar qəbul etsək, onda alırıq ki, birinci halda

$$[M_i,\ M_j]=i\hbar M_k$$

$$[M_\xi,\ M_\eta]=i\hbar M_\xi$$

ikinci halda isə

$$[M_\xi,\ M_\eta]=-i\hbar M_\xi$$

Buradan deyə bilərik ki, operatorların kommutatorları ifadəsinin sağ tərəfində (-) işarəsinin meydana gəlməsi, heç də [1] kitabında qeyd edildiyi kimi tərpənməz koordinat sistemindən ona nisbətən fırlanan koordinat sisteminə keçidin nəticəsi deyil, yalnız Landaunun kvant mexanikası kitabında klassik və kvant mexanikasında əsas Puasson mötərizələrinin başqalarından fərqli olaraq işarələnməsinin nəticəsidir.

ƏDƏBİYYAT

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. т. III, М.: Наука, 1974, с. 470.
2. Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики. М.: Ф.М.Л., 1960, с. 125.
3. Голдстейн Г. Классическая механика. М.: Т.Т.Л., 1957, с. 285.
4. Шифф Л. Квантовая механика. М.: И.Л., 1959, с. 159.
5. Ağamalıyev Ə.Q. Klassik mexanika. Bakı, 2009, s. 220.

О ЗАКОНАХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КОММУТАЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

А.Г.АГАМАЛИЕВ

РЕЗЮМЕ

В статье рассматривается задача о преобразовании условий коммутации операторов при преобразованиях в квантовой механике. Показано, что подобно инвариантности скобок Пуассона в классической механике относительно канонических преобразований, условия коммутации операторов в квантовой механике остаются инвариантными относительно унитарных преобразований.

Ключевые слова: канонические преобразования, унитарные преобразования, коммутатор.

ON THE TRANSFORMATION LAWS OF THE COMMUTATION RELATIONS OF THE OPERATORS IN QUANTUM MECHANICS

A.G.AGAMALIYEV

SUMMARY

The problem of the commutation conditions of the operators under transformations in quantum mechanics is considered. It is shown that as Poisson brackets are invariant concerning the canonic transformations in classical mechanics while the commutation condition of the operators is invariant regarding unitary transformations in quantum mechanics.

Key words: Canonical transformations, unitary transformations, commutator.

Редаксийайа дахил олду: 14.05.2013-ъц ил
Чапа имзаланды: 17.10.2013-ъц ил